CONCOURS COMMUN MINES.PONTS.TELECOM... 1979

OPTION P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option P', comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(\alpha,t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha t)}{\operatorname{sh} t} & \text{si } t \neq 0 \\ \alpha & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Soit f_α l'application partielle de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$f_\alpha(t) = f(\alpha,t)$$

Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\operatorname{sh} t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

PARTIE I

1°) a) Montrer que la fonction g est de la classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0,1]$;

en remarquant que $f(\alpha,t)$ s'exprime au moyen de valeurs prises par la fonction g, démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier les variations de f_α et construire la courbe représentative C_α ; discuter suivant les valeurs de α et étudier les positions relatives de C_α et de C_β pour $\alpha \leqslant \beta$.

2°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; calculer $\dfrac{\partial^{2n+1}}{\partial t^{2n+1}} f(\alpha,0)$.

Montrer que, pour chaque valeur de n, il existe un polynôme P_n à coefficients rationnels tel que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad P_n(\alpha) = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} f(\alpha,0) \qquad n \geqslant 1 .$$

Préciser le degré du polynôme P_n, s'il est pair ou impair, le coefficient du terme de plus haut degré.

b) Effectuer le développement limité de f_α dans un voisinage de 0 à un ordre tel qu'il soit possible de déterminer P_0, P_1 et P_2 .

.../...

3°) a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les polynômes P_n vérifient la relation :

$$P''_n = 2n(2n-1)\,P_{n-1} \quad .$$

b) Vérifier que si $n \geqslant 1$, il vient :

$$P_n(0) = 0 \qquad P_n(1) = 0 \qquad P_n(-1) = 0 \quad .$$

c) En raisonnant par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) et en distinguant selon que n est pair ou impair, représenter graphiquement les variations de la restriction de P_n au segment $[-1,+1]$.

4°) a) Montrer la relation :

$$P_n(X+1) - P_n(X-1) = 2X^{2n}$$

b) Exprimer la valeur de l'expression

$$s_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} k^{2n} \qquad n = 1,2,\ldots$$

à l'aide d'une valeur prise par un polynôme P_q ; calculer $s_{1,p}$ et $s_{2,p}$.

PARTIE II

1°) Soit Q_n le polynôme :

$$Q_n = (1+X)^{2n} - (1-X)^{2n} \qquad n = 1,2,\ldots$$

a) Préciser le degré de Q_n et le coefficient du terme de plus haut degré. Décomposer le polynôme Q_n en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

En déduire la valeur du produit : $\prod_{p=1}^{n-1} \operatorname{tg}^2 \frac{p\pi}{2n} \qquad n = 2,3,\ldots$

b) Montrer :

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{t^2}{4n^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{p\pi}{2n}}} \right)$$

c) Montrer que la série de terme général $\operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{t^2}{p^2\pi^2}\right)$ $p = 1,2,\ldots$ est convergente.

En remarquant : $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{t^2}{4n^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{p\pi}{2n}}\right) = \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{t^2}{p^2\pi^2}\right) \quad p = 1,2,\ldots$

montrer :

$$\operatorname{Log} g(t) = -\sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{t^2}{p^2\pi^2}\right)$$

En déduire :

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{t^2}{p^2\pi^2}} \right)$$

.../...

2°) a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle :

$$R_n = \prod_{p=1}^{n-1} \frac{p^2\pi^2}{X + p^2\pi^2}$$

b) En déduire la relation :

$$2 \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p-1} \frac{C_{n-1}^p}{C_{n-1+p}^p} = 1$$

c) Montrer :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_{n-1}^p}{C_{n-1+p}^p} = 1 \quad (p \in \mathbb{N}).$$

En déduire :

$$g(t) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{t^2}{t^2 + p^2\pi^2}$$

3°) a) Développer en série entière pour $|t| < \pi$, la fonction :

$$t \rightsquigarrow \frac{t^2}{t^2 + p^2\pi^2}$$

b) Soit a un réel donné strictement positif ;

Soit S_a l'expression : $S_a = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^a}$

Montrer que si t est un réel tel que $|t| < \pi$, la série de terme général

$$(-1)^n \frac{S_{2n+2}}{\pi^{2n+2}} t^{2n+2} \quad n = 0, 1, \ldots \text{ est convergente .}$$

Montrer l'inégalité :

$$\left| \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \frac{t^2}{t^2 + p^2\pi^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{S_{2n+2}}{\pi^{2n+2}} t^{2n+2} \right| \leqslant \frac{t^2}{\pi^2 - t^2} \cdot \sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$$

c) En déduire pour $|t| < \pi$:

$$g(t) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{S_{2n+2}}{\pi^{2n+2}} t^{2n+2}$$

d) A partir d'un développement limité de g dans un voisinage de l'origine, calculer les valeurs de S_2 et de S_4.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail